Statische Untersuchung

von

Bogen- und Wölbtragwerken

in

Stein, Eisen, Beton oder Eisenbeton
nach den Grundsätzen der Elastizitätstheorie

unter

Anwendung des Verfahrens mit konstanten Bogengrößen

von

Dr. techn. ROBERT SCHÖNHÖFER.

Mit 8 Textabbildungen.

BERLIN 1908.
Verlag von Wilhelm Ernst & Sohn.

VORWORT.

Der Bau von großen Bogen- und Wölbbrücken in Stein, Beton und Eisenbeton, sowie von großen Gewölben in Eisenbeton hat in den letzten Jahrzehnten einen ungeahnten Aufschwung genommen. Namentlich haben die Ausführungen in Eisenbeton eine hervorragende Verbreitung gefunden und die bisherigen üblichen eisernen Tragkonstruktionen vielfach verdrängt. Viel häufiger als früher kommt daher der Ingenieur in die Lage, die statische Berechnung für ein Gewölbe, eine Bogen- oder Wölbbrücke vorzunehmen. Wie jedem bekannt, erfordert eine solche statische Berechnung einen ziemlichen Aufwand von Zeit und geistiger Arbeit, und es hat daher, wie leicht begreiflich, nicht an Versuchen gefehlt, die statische Berechnung zu vereinfachen. Wie überall, so macht sich eben auch hier der Grundsatz „Zeit ist Geld" fühlbar, und das Verlangen nach einer Vereinfachung tritt gebieterisch hervor.

Als Ingenieur der Brückenbauabteilung der k. k. Eisenbahnbaudirektion in Wien, welche Behörde bekannterweise die zweite Eisenbahnverbindung mit Triest baute, war dem Verfasser die Aufgabe gestellt worden, die Mehrzahl der großen gewölbten Brücken dieser neuen Alpenbahnstrecken zu berechnen. Da die ihm hierzu zur Verfügung gestellte Zeit sehr karg bemessen war, so war sein Bestreben naturgemäß darauf gerichtet, ein Verfahren zu ersinnen, welches, bei der für die Praxis erforderlichen Genauigkeit, vor allem rasch zum Ziele führt. Dieses Bestreben war auch mit Erfolg begleitet, und die vom Verfasser erdachte Vereinfachung wurde bei der statischen Berechnung der meisten gewölbten Brücken der neuen Alpenbahnlinien mit Vorteil angewendet. Die hierbei sich ergebende Zeitersparnis erwies sich als ziemlich bedeutend, so daß sich der Verfasser entschloß, sein vereinfachtes Verfahren der Öffentlichkeit zu übergeben. Es erschien im Jahre 1904 im Heft 14 der Österreichischen Wochenschrift für den öffentlichen Baudienst ein Aufsatz unter dem Titel: „Statische Untersuchung von Gewölben nach dem Verfahren mit konstanten Bogengrößen". Durch

diese Veröffentlichung erfuhr das Verfahren mehrfache Verwendung bei verschiedenen privaten und behördlichen Bauämtern. Veröffentlichungen über ausgeführte Wölbbrücken, deren statische Berechnung nach dem Verfahren des Verfassers vorgenommen wurde, sind seines Wissens bisher erschienen in: Der Bautechniker, 1904, Nr. 28 u. 29: „Die neue Illbrücke in Feldkirch" von Egid Ueberreiter, k. k. Ingenieur, und in Beton u. Eisen, 1906, H. XII u. 1907, H. I: „Der Eisenbetonbau bei den neuen, durch die k. k. Eisenbahnbaudirektion hergestellten Bahnlinien der österreichischen Monarchie" von August Nowak, Baukommissär. Weiteres befindet sich in Beton u. Eisen, 1907, H. VII in der Fortsetzung des Aufsatzes: „Geschäftshaus des Architekten C. Hofmeier, Wien I, Kärntnerstraße 27" von Ingenieur R. Wuczkowski die Berechnung eines Dachbinders in Eisenbeton, bei welchem ein besonderer Fall des Verfahrens zur Anwendung gelangte. In Beton u. Eisen, 1907, H. III erschien ein weiterer Aufsatz des Verfassers, betitelt: „Bestimmung der Spannungen infolge des Einflusses von Wärmeschwankungen auf Gewölbe nach dem Verfahren mit konstanten Bogengrößen".

Mittlerweile hatte dieses Verfahren eine ziemliche Verbreitung gefunden, und es liefen beim Verfasser und bei der Verwaltung der Österreichischen Wochenschrift für den öffentlichen Baudienst zahlreiche Zuschriften ein, in denen um Überlassung von Sonderdrucken oder um die betreffende Nummer der genannten Zeitschrift gebeten wurde, so daß der Verfasser sich entschloß, dieses Werkchen herauszugeben.

Der Verfasser war bemüht, vorliegenden Gegenstand in eingehender Weise und leicht faßlicher Darstellung zu behandeln. Zugleich brachte er die meisten anderen Vereinfachungen und neueren Verfahren mit zur Anwendung, um so als Gesamtergebnis eine Anleitung zur raschen statischen Berechnung von Wölb- und Bogenbrücken und Gewölben jedem der geehrten Herren Fachkollegen an die Hand geben zu können.

Wien, im Oktober 1907.

Der Verfasser.

Inhaltsübersicht.

ERSTER TEIL.

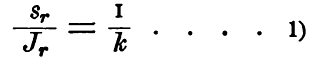
Das Wesen des Verfahrens.

In den Grundformeln für die statische Berechnung von Bogen- oder Wölbtragwerken nach der Elastizitätstheorie findet sich unter dem Integralzeichen der Ausdruck $\frac{ds}{J}$ vor. Hierbei bedeutet ds das Differential der Bogen- bezw. Gewölbeachse und J das Trägheitsmoment des dazu gehörigen Querschnittes. Nur bei einer parabelförmigen Achse geben die betreffenden Integrale für die Praxis brauchbare Ausdrücke; bei allen übrigen Bogenformen, ausgenommen flache Bogen, bei denen die für die Parabelbogenform geltenden Ergebnisse angenähert zur Anwendung kommen können, sieht man sich genötigt, die Integration durch irgend ein Näherungsverfahren in eine Summenbildung umzuwandeln. Es tritt dann an Stelle des Differentials ds der Bogenachse ein endlich kleines Stück s derselben und J bedeutet das mittlere Trägheitsmoment des Bogenstückes von der Länge s. Diesen Ausdruck $\frac{s}{J}$ wollen wir — um ihm einen Namen zu geben — die Bogengröße des Bogenstückes von der Länge s nennen.

Bei den bisher üblichen Berechnungsverfahren wurde die Bogenachse in der Regel in eine Anzahl gleicher Teile geteilt. Auch wurde zuweilen die Sehne der Bogenachse in gleiche Teile geteilt, und durch die so erhaltenen Teilpunkte wurden Lotrechte gelegt, welche die Stücke s auf der Bogenachse begrenzten. Wohl nur unter besonderen Verhältnissen wurden die Stücke s ganz regellos angenommen. Wenn wir von dem Fall, wo die Trägheitsmomente in allen Bogenquerschnitten gleich groß sind, hier vollständig absehen, da ein solcher Bogen als statisch unzweckmäßig und unwirtschaftlich anzusprechen ist, so ist es leicht begreiflich, daß bei allen vorerwähnten Teilungsverfahren die Bogengrößen ungleich groß ausfallen müssen. Diese Ungleichheit der Bogengrößen gestaltet aber die bisherigen Berechnungsverfahren ziemlich umständlich und zeitraubend. Es war daher anzustreben, diese Bogengrößen gleich groß zu erhalten, das

heißt, die Einteilung der Bogenachse in Stücke s so vornehmen zu können, daß $\frac{s}{J}$ zu einer konstanten Größe wird.

Greifen wir irgend ein Stück des Bogens von der Länge s_r (in der Bogenachse gemessen) und dem mittleren Trägheitsmoment J_r heraus (siehe Abb. 1), so können wir die Bogengröße ausdrücken durch:



$$\frac{s_r}{J_r} = \frac{1}{k} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 1)$$

wobei k eine konstante Größe bedeute. Das mittlere Trägheitsmoment des Bogenstückes können wir gleich setzen:

$$J_r = \frac{1}{2}\,(i_r + i_{r+1}).$$

Wir denken uns nun die Bogenachse geradlinig aufgerollt und tragen von ihr lotrecht nach oben und nach unten die Trägheitsmomente der Querschnitte in irgend einem Maßstab auf. Wir erhalten auf diese Weise je eine oben und je eine unten zur aufgerollten Bogenachse symmetrisch liegende Kurve der Trägheitsmomente. Im Bereiche des Bogenstückes von der Länge s_r können wir die beiden Kurven der Trägheitsmomente geradlinig verlaufend annehmen. Es ergibt sich dann aus Abb. 1 sofort:

Abb. 1.

$$\overline{BE} = i_r + i_{r+1} = 2J_r,$$

weiter:

$$\frac{\overline{CE}}{\overline{BE}} = \frac{s_r}{2J_r} = \operatorname{cotg}\varphi.$$

Werden die Teile s nun so gewählt, daß der Winkel φ gleich groß bleibt, so können wir setzen:

$$\operatorname{cotg}\varphi = \frac{1}{2k}$$

und wir erhalten:

$$\frac{s_r}{J_r} = \frac{1}{k},$$

das ist die in Gleichung 1 ausgesprochene Bedingung für die Erzielung von konstanten Bogengrößen.

Auf Grund dieser Betrachtung ergibt sich nun das Teilungsverfahren. Ehe auf dasselbe näher eingegangen wird, sei noch folgenden Bemerkungen Raum gegeben. Die Länge der Bogenachse S kann rechnerisch oder zeichnerisch ermittelt werden. Welches der

beiden Verfahren wir wählen, richtet sich nach der verlangten Genauigkeit. Ist die Bogenachse ein Kreisbogen oder eine sonstige berechenbare Kurve, so werden wir die Bogenlänge am besten rechnerisch bestimmen. Haben wir nunmehr die Länge S ermittelt, so teilen wir diese in eine Anzahl gleicher Teile und übertragen die Teilpunkte auf die Bogenachse selbst (sieh Abb. 2). Um diese Hilfsteilung recht genau zu erhalten, empfiehlt es sich, die Teile recht klein zu nehmen. Nunmehr bestimmen wir die Trägheitsmomente der Bogenquerschnitte in den Teilpunkten und tragen sie von den entsprechenden Punkten der aufgerollten Bogenachse lotrecht nach oben und nach unten auf, und erhalten die beiden Trägheitsmomentenlinien. Bei Gewölben in Stein oder Beton mit allmählich wachsender Bogenstärke und Gewölbetiefe wird die Trägheitsmomentenlinie einen gleichförmigen Verlauf aufweisen; bei Gewölben in Eisenbeton und bei eisernen Bogentragwerken wird entsprechend der sprungweisen Änderung der Querschnitte auch die Trägheitsmomentenlinie einen sprungweisen Verlauf nehmen. Es unterliegt nun gar keinem Bedenken, an Stelle der gebrochenen Linie eine ausgleichende stetige Linie zu setzen. Daß dieses Verfahren vollauf berechtigt ist, zeigt folgende Betrachtung. Bei eisernen Bogenkonstruktionen*) wird die Verstärkung des Querschnittes in der Regel durch Auflegen von Lamellen erzielt. Es ist nun klar, daß der Querschnitt jeder aufgelegten Lamelle erst dann als voll wirkend zu rechnen ist, wenn die zur Übertragung der Spannung entsprechende Nietenanzahl erreicht ist. Vom ersten Anschlußniet bis zu dieser Nietenanzahl wird ein allmähliches Anwachsen des Trägheitsmomentes stattfinden. Die der Wirklichkeit entsprechende Trägheitsmomentenlinie wird also keine Sprünge aufweisen, und die an ihre Stelle gesetzte ausgleichende Linie wird sich praktisch mit ihr decken. Bei Eisenbetonkonstruktionen wird die Verstärkung des Eisenquerschnittes (die Verstärkung des Betonquerschnittes geschieht in der Regel allmählich) durch Vermehrung der Eiseneinlagen oder Verstärkung der Eisenkonstruktion (System Melan) erzielt. Auch hier ist der neu hinzugekommene Querschnittsteil erst dann als vollwirkend anzusehen, wenn die zur Übertragung der Kraft notwendige Haftspannung erreicht ist, und es wird auch hier die ausgleichende Linie der sprungweise verlaufenden Trägheitsmomentenkurve an Stelle der wirklich vorhandenen gesetzt werden können. Schließlich sei hier noch der wohl selten vorkommende Fall eines Gewölbes besprochen, bei welchem die Gewölbestärke gegen den Scheitel stufenförmig, ähnlich wie bei den Ziegelgewölben des Hochbaues, abnimmt. Auch hier kann man die Trägheitsmomentenlinie allmählich verlaufend annehmen, da die vorspringenden Ecken des

*) Hierunter sind natürlich nur Vollwandtragwerke zu verstehen.

Gewölbes keinen Anteil an der Übertragung der Spannungen haben. Wir erhalten also bei allen in der Praxis vorkommenden Fällen Trägheitsmomentenlinien mit gleichförmigem Verlauf. Nunmehr sei das Teilungsverfahren selbst beschrieben.

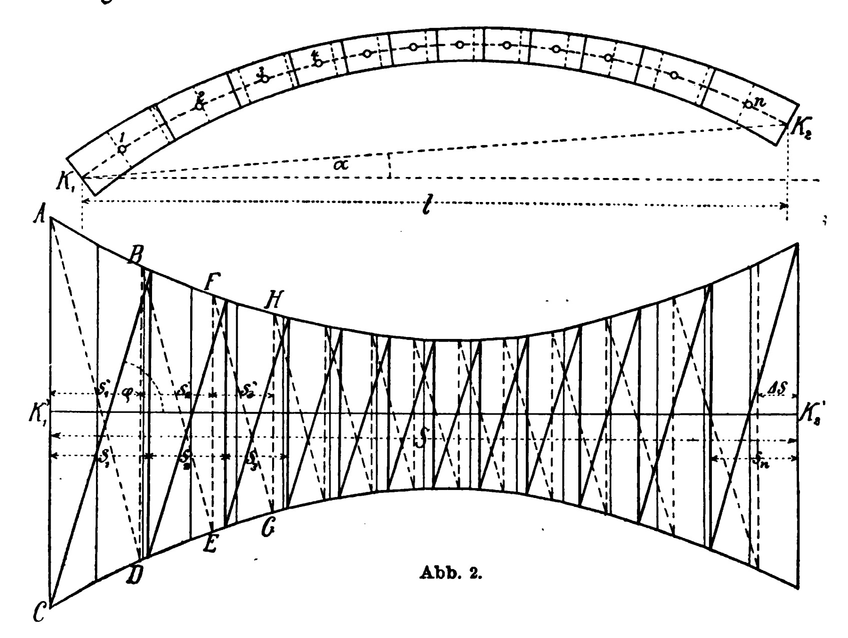


Abb. 2.

Das erste Stück s_1' der Bogenachse wird angenommen und auf die aufgerollte Bogenachse aufgetragen. Im Endpunkte von s_1' errichten wir eine Senkrechte, welche die beiden Trägheitsmomentenlinien in zwei Punkten B und D schneidet. Wir erhalten nunmehr das Trapez $ABDC$. Wir ziehen nun die Diagonale AD und zu dieser eine Parallele durch den Punkt B, bis die untere Trägheitsmomentenlinie geschnitten wird. Durch den so erhaltenen Schnittpunkt E legen wir eine Lotrechte EF, welche das Bogenstück s_2' auf der aufgerollten Bogenachse abschneidet. Dann machen wir $FG \parallel BE$, ziehen die Lotrechte GH und erhalten s_3' usw. Wie leicht begreiflich, wird bei dieser Teilung ein Restteil Δs übrig bleiben. Ist dieses Δs verhältnismäßig sehr klein, so kann ohne weiteres das S in demselben Verhältnis geteilt werden, in dem $(S - \Delta s)$ bereits geteilt vorliegt. Dies kann in einfacher Weise zeichnerisch geschehen. Auf rechnerischem Wege würden sich die nunmehrigen Bogenstücke nach folgendem Ausdruck ergeben:

$$s_r'' = s_r' \frac{S}{(S - \Delta s)} \quad \ldots \ldots \quad 2).$$

Ist jedoch Δs größer, so ist die Teilung zu wiederholen, zu welchem Zwecke man das erste Bogenstück entsprechend der Größe von Δs abändert. Diese nunmehr wiederholte Teilung wird in der Regel schon zum Ziele führen, indem sich entweder ein verschwindend kleines Δs ergibt, welches vernachlässigt werden kann, oder es wird Δs derart klein sein, daß man das S sofort nach obigem Verfahren teilen kann. Eine weitere Teilung wird sich, namentlich bei einiger Übung, in den seltensten Fällen als notwendig erweisen. Wir erhalten also schließlich die Länge S in n Teile geteilt, für welche folgende Verhältnisse gelten:

$$\frac{s_1}{J_1} = \frac{s_2}{J_2} = \frac{s_3}{J_3} = \quad \ldots\ldots \quad \frac{s_n}{J_n} = 2 \operatorname{cotg} \varphi = \text{konstant.}$$

Die auf diese Weise erhaltenen Teilpunkte werden auf die Bogenachse übertragen, und durch sie Normalen gelegt, wodurch der Bogen in n Bogenstücke zerlegt wird. Für jedes dieser Bogenstücke ist die zugehörige Bogengröße $\frac{s}{J}$ konstant. Nunmehr sind die Bogenpunkte (Schwerpunkte der Bogenstücke) 1, 2, 3 . . . . n zu bestimmen. Diese Bogenpunkte können angenähert in der Mitte der Teile s angenommen werden. Nur bei größeren Bogenstücken oder bei einer größeren Genauigkeit werden wir die Bogenpunkte nach irgend einem Verfahren ermitteln.

Wie sich aus dem besprochenen Teilungsverfahren von selbst ergibt, ist der Maßstab, in welchem die Trägheitsmomente aufgetragen werden, ganz beliebig, da es sich hierbei nur um die Verhältnisse der J zueinander handelt. Wir werden daher vor allem bestrebt sein, den Maßstab so zu wählen, daß die Trägheitsmomentenlinien weder zu flach noch zu verzerrt erscheinen.

Der vorerwähnte Umstand, daß es sich nur um die Verhältnisse der J zueinander handelt, gestattet die Annehmlichkeit, alle Konstanten im Ausdrucke des Trägheitsmomentes weglassen zu dürfen. Handelt es sich beispielsweise um ein Gewölbe in Stein oder Beton, so ist das Trägheitsmoment irgend eines Querschnittes gegeben durch:

$$J = \frac{1}{12} b\, d^3,$$

wenn d die Gewölbestärke und b die Gewölbetiefe bedeutet. Es genügt in diesem Falle, den Ausdruck $b\, d^3$ in irgend einem Maßstab aufzutragen. Ist die Gewölbetiefe b überall gleich, oder erstrecken wir die Untersuchung, wie dies vielfach üblich ist, nur auf 1 m Gewölbetiefe, so können wir in diesem Fall an Stelle der Trägheitsmomente die dritten Potenzen der Gewölbestärken unmittelbar in irgend einem

Maßstab auftragen. In ähnlicher Weise werden sich auch in anderen Fällen die Ausdrücke für die Trägheitsmomente vereinfachen lassen.

Zu der Wahl der Größe des ersten Bogenteiles s_1 ist folgendes zu bemerken. Da die Größe von s_1 die Anzahl n der Bogenstücke bestimmt, so werden wir selbstverständlich bestrebt sein, das s_1 recht groß anzunehmen, um n recht klein und hiermit die Berechnung einfach zu erhalten. Anderseits werden wir im Hinblick auf die verlangte Genauigkeit bestrebt sein müssen, das n ziemlich groß zu erhalten, und es wird daher in jedem einzelnen Falle Sache des praktischen Gefühles sein, in dieser Hinsicht eine günstige Wahl zu treffen.

Bei vorliegendem Beispiele eines unsymmetrischen Bogens (Abb. 2) mußte der ganze Bogen in Bogenstücke geteilt werden. Es bedarf wohl keiner besonderen Bemerkung, daß es bei einem symmetrischen Bogen genügt, den halben Bogen nach konstanten Bogengrößen zu teilen.

Bei den vorhergehenden Betrachtungen war stillschweigend vorausgesetzt, daß für den ganzen Bogen der Elastizitätsmodul E konstant sei. Ist dies nicht der Fall, so wird E unter dem Integral- bezw. Summenzeichen verbleiben.

In einem solchen Falle werden wir die Teilung des Bogens so vornehmen, daß der Ausdruck $\frac{s}{E J_i}$ eine konstante Größe wird:

$$\frac{s}{E J} = \frac{1}{k'} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 3).$$

Das Verfahren bei dieser Teilung wird im allgemeinen ganz dasselbe sein, wie bereits beschrieben wurde, nur wird an Stelle der Kurve der Trägheitsmomente J die Kurve der Produkte $E J$ treten.

Im Falle sich der Elastizitätsmodul sprungweise ändert und daher auch die Kurve EJ einen sprungweisen Verlauf nimmt, wird es, wie leicht einzusehen, auch in diesem Falle keinem Bedenken unterliegen, an Stelle der sprungweise verlaufenden Linie eine ausgleichende zu setzen. Daß hier die Größen $E J$ ebenfalls nur ihrem Verhältnisse nach aufgetragen zu werden brauchen, bedarf auch keiner besonderen Bemerkung. Es sei gleich an dieser Stelle erwähnt, daß bei den in den folgenden Teilen abzuleitenden Grundformeln der Einfachheit halber das E konstant angenommen wurde. Es unterliegt aber keiner Schwierigkeit, die Formeln für ein wechselndes E unter Anwendung der Teilung nach konstanten Bogengrößen $\frac{s}{E J}$ aufzustellen.

Schließlich sei noch folgenden Bemerkungen Raum gegeben. Die Konstante k kommt, wie aus der weiteren Abhandlung erhellt, in

den Formeln nur dann zum Verschwinden, wenn man sich mit einem angenäherten Ergebnis begnügt. Im anderen Falle bleibt das k in der Formel und ist zu berechnen. Wäre die Teilung nach konstanten Bogengrößen mathematisch genau möglich, so würde es genügen, irgend eines der n Bogenstücke herauszugreifen und $k = \frac{J}{s}$ $\left(\text{bezw. } k' = \frac{EJ}{s}\right)$ zu berechnen. Weil aber, aus leicht begreiflichen Gründen, die Größen k mathematisch genommen nicht gleich sind, sondern kleine Unterschiede aufweisen werden, so wird es sich empfehlen, die Größen $\frac{J}{s}$ $\left(\text{bezw. } \frac{EJ}{s}\right)$ je nach der zu erzielenden Genauigkeit für einige oder mehrere Bogenstücke zu berechnen und k (bezw. k') dem arithmetischen Mittel aus den so erhaltenen Werten gleich zu setzen.

ZWEITER TEIL.

Statische Untersuchung von Bogen- und Wölbtragwerken mit Kämpfergelenken.

1. Ableitung der Grundformeln für das belastete Tragwerk ohne Einfluß von Wärmeschwankungen.

Das Biegungsmoment M für irgend einen Querschnitt des gewichtlos gedachten Bogenträgers (sieh Abb. 3) läßt sich, wenn wir unter y den lotrechten Abstand des Querschnittschwerpunktes von der Achse $K_1 K_2$ verstehen, und wenn H_q den Horizontalschub und $\mathfrak{M}$ das Biegungsmoment der Belastung für den frei aufliegenden Balken von der Länge l bedeutet, schreiben:

$$M = \mathfrak{M} - H_q \sec\alpha \cdot y \cos\alpha$$

oder:

$$M = \mathfrak{M} - H_q\, y \quad \ldots\ldots\ldots \quad 4).$$

Bezeichnet nun

- S die Länge der Bogenachse (Verbindungslinie der Querschnittschwerpunkte, neutrale Achse),
- ds das Differential der Bogenachse,
- J das Trägheitsmoment des Querschnittes, bezogen auf die wagerechte Schwerachse,

F den Flächeninhalt des Querschnittes,
N die Normalkraft des Querschnittes,

so ist nach den bekannten Sätzen der Festigkeitslehre*) der Ausdruck für die Formänderungsarbeit gegeben durch:

$$\mathfrak{A} = \int_0^S \frac{M^2\, ds}{2\, EJ} + \int_0^S \frac{N^2\, ds}{2\, EF} \quad \ldots \ldots \quad 5).$$

Hierbei ist vorausgesetzt, daß die Normalspannung σ im Abstande η von der Querschnittschwerachse nach der, streng genommen, nur für den geraden Stab gültigen Formel

$$\sigma = \mp \frac{M\eta}{J} - \frac{N}{F}$$

berechnet werden darf, und daß ferner die Arbeit der Abscherungskräfte vernachlässigt werden kann.

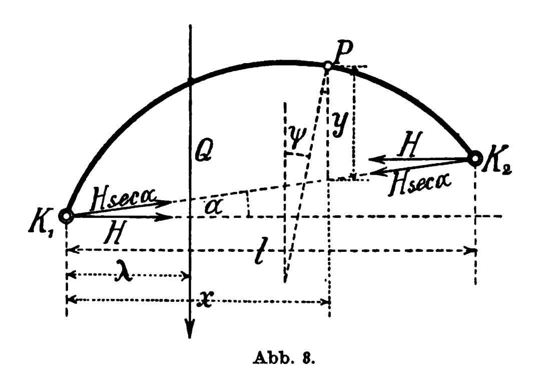


Abb. 8.

Das von N abhängige Glied der Gleichung 5 ist von so geringem Einfluß auf das Endergebnis, daß wir näherungsweise setzen können:

$$N = H_q \sec \alpha \quad \ldots \ldots \ldots \quad 6).$$

Verstehen wir weiter unter F_0 den Mittelwert der verschiedenen Werte F, so können wir schreiben:

$$\int_0^S \frac{N^2\, ds}{2\, EF} = \frac{H_q{}^2\, S \sec^2 \alpha}{2\, E F_0} \quad \ldots \ldots \quad 7).$$

Unter Annahme eines Wärmezustandes, für welchen der Bogen spannungslos ist, weiter unter Voraussetzung starrer Widerlager muß auf Grund des Satzes vom Kleinstwert der Formänderungsarbeit:

$$\frac{d\,\mathfrak{A}}{d\, H_q} = 0.$$

*) Vergl. Müller-Breslau: „Vereinfachung der Theorie der statisch unbestimmten Bogenträger". Zeitschr. des Arch.- und Ingenieurvereines zu Hannover. 1884, H. 8, S. 578 bis 581.

Die Differentiation durchgeführt, ergibt unter Beachtung, daß auf Grund der Gleichung 4:

$$\frac{dM}{dH_q} = -y,$$

folgende Gleichung:

$$\int_0^S \frac{\mathfrak{M}\, y\, ds}{J} - H_q \int_0^S \frac{y^2\, ds}{J} - \frac{H_q\, S \sec^2 \alpha}{F_0} = 0.$$

Hieraus ergibt sich:

$$H_q = \frac{\int_0^S \frac{\mathfrak{M}\, y\, ds}{J}}{\int_0^S \frac{y^2\, ds}{J} + \frac{S \sec^2 \alpha}{F_0}}.$$

Setzen wir an Stelle der Integration die Summenbildung und nehmen an, daß der Bogen nach konstanten Bogengrößen in n Teile geteilt sei, so erhalten wir:

$$H_q = \frac{\sum_1^n \mathfrak{M}\, y \frac{s}{J}}{\sum_1^n y^2 \frac{s}{J} + \frac{S \sec^2 \alpha}{F_0}}.$$

Berücksichtigen wir, daß unter dieser Voraussetzung nach Gleichung 1

$$\frac{s}{J} = \frac{1}{k},$$

so erhalten wir für den Horizontalschub den einfachen Ausdruck:

$$H_q = \frac{\sum_1^n \mathfrak{M}\, y}{\sum_1^n y^2 + \frac{k\, S \sec^2 \alpha}{F_0}} \qquad \text{8).}$$

Haben wir den Fall eines Bogens mit gleich hohen Kämpfergelenken, so erhalten wir folgende Formel:

$$H_q = \frac{\sum_1^n \mathfrak{M}\, y}{\sum_1^n y^2 + \frac{k\, S}{F_0}} \qquad \text{9).}$$

Auf Grund des berechneten Horizontalschubes sind nunmehr die Biegungsmomente M zufolge Gleichung 4 bestimmt. Es erübrigt

noch, die Normalkräfte zu ermitteln, was nach folgender Gleichung geschieht:

$$N = H_q \cos \psi + \mathfrak{V} \sin \psi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 10).$$

Hinsichtlich des Winkels ψ sieh Abb. 3. $\mathfrak{V}$ ist die lotrechte Seitenkraft der im Querschnitt wirkenden Mittelkraft der äußeren Kräfte und ist gleich der Auflagerkraft für den freiaufliegenden Balken von der Länge l.

2. Ableitung der Grundformeln für das unbelastete Tragwerk unter dem Einfluß von Wärmeänderungen.

Der gewichtslos und unbelastet gedachte Bogen erfahre eine gleichmäßige Erwärmung um τ^0 gegenüber einer Temperatur, für welche er als spannungslos anzusehen ist.*) Wäre der Bogen nicht durch Gelenke festgehalten, so würde er sich ausdehnen und die Sehne $K_1 K_2$ (Abb. 3) würde eine Verlängerung erfahren, welche gleich ist $\varepsilon \tau l \sec \alpha$. Hierbei bedeutet ε das (mittlere) Wärmeausdehnungsverhältnis des Bogenmaterials. Die Voraussetzung starrer Widerlager bedingt die in den Gelenken gleich groß und entgegengesetzt wirkenden Kräfte $H_t \sec \alpha$. Das durch die Temperaturspannungen hervorgerufene Biegungsmoment in irgend einem Punkt der Bogenachse ist durch folgenden Ausdruck gegeben:

$$M = -H_t y \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 11).$$

Die Formänderungsarbeit ist nunmehr bestimmt:

$$\mathfrak{A} = \int_0^S \frac{M^2 ds}{2EJ} + \int_0^S \frac{N^2 ds}{2EF} + \mathfrak{W} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 12).$$

Das letzte Glied entspricht der Arbeit der Widerlagerkräfte und ist gegeben durch:

$$\mathfrak{W} = -\varepsilon \tau l \sec \alpha \cdot H_t \sec \alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 13).$$

Berücksichtigen wir die in den Gleichungen 6 und 7 ausgedrückten Vereinfachungen, so können wir schreiben:

$$\mathfrak{A} = \int_0^S \frac{M^2 ds}{2EJ} + \frac{H_t^2 S \sec^2 \alpha}{2EF_0} - \varepsilon \tau l H_t \sec^2 \alpha$$

*) Diese Temperatur wird ungefähr dem Mittelwert aus den während der Aufführung des Bogens herrschenden Temperaturen entsprechen.

Unter Anwendung des Satzes vom Kleinstwert der Formänderungsarbeit erhalten wir in ähnlicher Weise wie im vorigen Abschnitt:

$$H_t \int_0^S \frac{y^2\, ds}{EJ} + \frac{H_t\, S \sec^2 \alpha}{E F_0} - \varepsilon \tau l \sec^2 \alpha = 0.$$

Führen wir wiederum an Stelle der Integration die Summenbildung ein, so erhalten wir unter Berücksichtigung von $\frac{s}{J} = \frac{1}{k}$ folgenden Ausdruck für den Horizontalschub:

$$H_t = \frac{k E \varepsilon \tau l \sec^2 \alpha}{\sum_1^n y^2 + \frac{k S \sec^2 \alpha}{F_0}} \quad \ldots \ldots \quad 14).$$

Der Fall gleich hoher Widerlager ergibt folgende Formel:

$$H_t = \frac{k E \varepsilon \tau l}{\sum_1^n y^2 + \frac{k S}{F_0}} \quad \ldots \ldots \quad 15).$$

Für den Fall, daß die Wärme abnimmt und um τ^0 unter die Temperatur sinkt, für welche der Bogen als spannungslos auzusehen ist, wird der Horizontalschub entgegengesetzt wirken und der Ausdruck für H_t vorn ein Minuszeichen erhalten.

Auf Grund des ermittelten Horizontalschubes berechnen sich die Biegungsmomente nach Gleichung 11. Die Normalkräfte bestimmen sich auf Grund folgender Formel:

$$N = H_t \cos \psi \quad \ldots \ldots \ldots \quad 16).$$

3. Die Grundformeln für das belastete Tragwerk unter gleichzeitigem Einfluß von Wärmeschwankungen.

Aus den Grundformeln, wie sie in den vorhergehenden Abschnitten 1 und 2 abgeleitet wurden, erhalten wir durch algebraische Summierung sofort die Ausdrücke für den Gesamthorizontalschub. Für den Fall von ungleich hohen Kämpfergelenken ist:

$$H = \frac{\sum_1^n \mathfrak{M} y \pm k E \varepsilon \tau l \sec^2 \alpha}{\sum_1^n y^2 + \frac{k S \sec^2 \alpha}{F_0}} \quad \ldots \ldots \quad 17).$$

Für den Bogenträger mit gleich hohen Kämpfergelenken ergibt sich:

$$H = \frac{\sum_1^n \mathfrak{M} y \pm k E \varepsilon \tau l}{\sum_1^n y^2 + \frac{k S}{F_0}} \quad \ldots \ldots \quad 18).$$

Das Pluszeichen gilt für den Fall der Temperaturzunahme $(+\tau^0)$ und das Minuszeichen für den Fall der Temperaturabnahme $(-\tau^0)$.

Der Ausdruck für das Biegungsmoment lautet:

$$M = \mathfrak{M} - H y \quad \ldots \ldots \ldots \quad 19)$$

und jener für die Normalkraft:

$$N = H \cos \psi + \mathfrak{V} \sin \psi \quad \ldots \ldots \quad 20).$$

4. Statische Berechnung des Zweigelenkbogens bei unveränderlicher Belastung.

Dies betrifft vor allem die Bogenträger und Gewölbe für Zwecke des Hochbaues. Hier ist die Berechnung in der Regel mit der Untersuchung von einem bis zwei Belastungsfällen abgetan.

Aber auch bei einem Tragwerk mit veränderlicher Last, wie zum Beispiel einer Bogen- oder Wölbbrücke, kommen wir in die Lage, nur einen Belastungsfall zu berechnen, wenn es sich nämlich darum handelt, die den statischen Verhältnissen am besten entsprechende Bogenform zu finden, oder aber eine nach irgend welchen anderen Grundsätzen angenommene Bogenform zuvor rasch auf ihre Richtigkeit für den ungünstigsten Belastungsfall zu untersuchen, ehe wir eine genaue Berechnung vornehmen.

Haben wir es sonach mit der Untersuchung von nur einem oder zwei bestimmten Belastungsfällen zu tun, so wird es vorteilhafter sein, die Untersuchung für jeden Belastungsfall vorzunehmen und nicht erst zur Bestimmung von Einflußlinien zu schreiten.

Dieser Untersuchung kann das rechnerische oder zeichnerische Verfahren zugrunde gelegt werden.

Unter der Voraussetzung eines Bogens mit ungleich hohen Kämpfern und des Vorhandenseins von Wärmeschwankungen ist der Horizontalschub nach Gleichung 17 gegeben durch:

$$H = \frac{\sum_1^n \mathfrak{M} y \pm T}{\sum_1^n y^2 + C} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 21)$$

wobei

$$T = kE\varepsilon\tau l \sec^2\alpha \quad \ldots\ldots \quad 22)$$

und

$$C = \frac{kS\sec^2\alpha}{F_0} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 23).$$

Die Berechnung dieses Ausdruckes ist sehr einfach. Vor allem werden die Abstände y der Bogenpunkte 1, 2, 3 ... n der Bogenstücke bestimmt und die diesen Punkten entsprechenden Biegungsmomente $\mathfrak{M}$ für die gegebene Belastung, bezogen auf einen freiaufliegenden Träger von der Länge l berechnet, wodurch die Summenausdrücke gegeben sind. Zur besseren Übersicht bedient man sich zweckmäßig folgender Tabelle:

Punkt	y in m	y^2 in m²	$\mathfrak{M}$ in tm	$\mathfrak{M}y$ in tm²
1	...	...	...	...
2	...	...	...	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
n	...	...	...	...
		$\sum_1^n y^2 = \ldots$		$\sum_1^n \mathfrak{M}y = \ldots$

Die übrigen Größen in der Formel für H sind alle bekannt. Die Ausdrücke für T und C sind verhältnismäßig klein und können daher angenähert (etwa mit Zuhilfenahme des Rechenschiebers) berechnet werden. Nunmehr lassen sich die Biegungsmomente M zufolge Gleichung 19 und die Normalkräfte N zufolge Gleichung 20 ermitteln, auf Grund deren wiederum die Größtspannungen in jedem Querschnitt berechnet werden können.

Die Durchführung der statischen Berechnung auf zeichnerischem Wege ist in Abb. 4 ersichtlich gemacht. Unter Annahme einer Polentfernung p_q wird für die gegebene Belastung durch Kräfte Q_1, Q_2 ... ein Seileck gezeichnet, darauf werden die zu den Bogenpunkten 1, 2 ... n zugehörigen Ordinaten m_1, m_2 ... m_n bestimmt. Die Biegungsmomente sind dann gegeben durch:

$$\mathfrak{M} = p_q m.$$

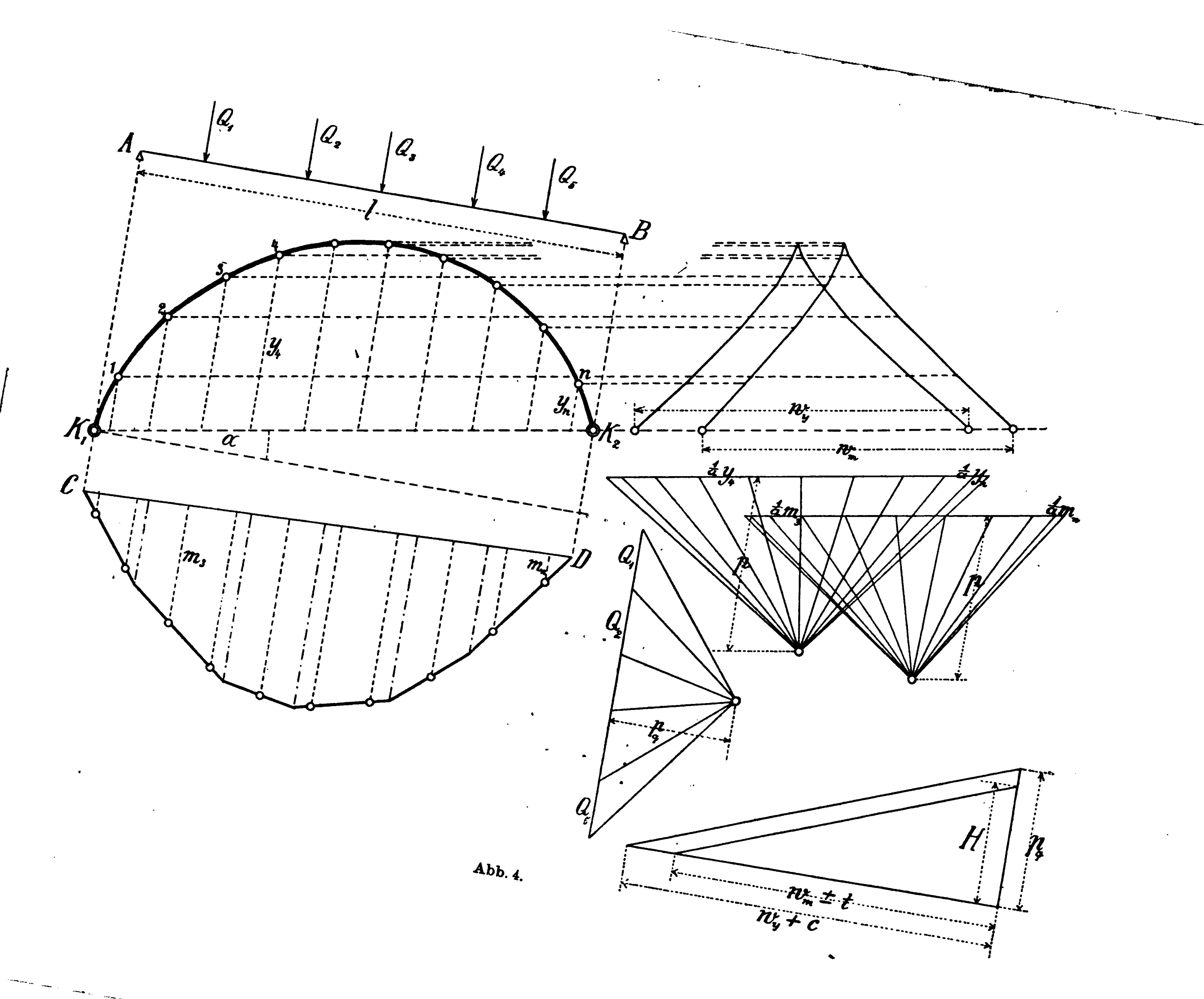


Abb. 4.

Der Ausdruck im Zähler von H läßt sich dann schreiben:

$$\sum_1^n \mathfrak{M} y = p_q \sum_1^n m y.$$

$\sum_1^n m y$ ist jedoch das statische Moment von den in den Bogenpunkten wirkenden idealen Kräften m, bezogen auf die Achse $K_1\ K_2$. Wir zeichnen zu diesem Ende ein Krafteck der Kräfte m mit der lotrecht zu messenden Polentfernung p_m. Die Kräfte m werden zweckmäßig im verkleinerten Maßstabe $\left(\frac{1}{a_m}\right)$ aufgetragen. Die letzten Seiten des Seileckes schneiden auf der Achse $K_1\ K_2$ das Stück w_m ab. Es ist dann

$$\sum_1^n \mathfrak{M} y = p_q\, a_m p_m w_m.$$

In ähnlicher Weise bestimmt sich der Ausdruck $\sum_1^n y^2$ als statisches Moment der idealen Kräfte y, bezogen auf die Achse $K_1 K_2$, und wir erhalten:

$$\sum_1^n y^2 = p_y\, a_y\, w_y.$$

Der Horizontalschub ist somit gegeben durch:

$$H = \frac{p_q\, a_m\, p_m\, w_m \pm T}{p_y\, a_y\, w_y + C} \quad \ldots\ldots \quad 24).$$

Machen wir nun $a_m = a_y = a$ und $p_m = p_y = p$, so erhalten wir:

$$H = \frac{p_q\,(w_m \pm t)}{(w_y + c)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 25)$$

wobei:

$$t = \frac{T}{a p p_q} = \frac{k\, E\, \varepsilon\, \tau\, l \sec^2 \alpha}{a\, p\, p_q} \quad \ldots\ldots \quad 26)$$

und

$$c = \frac{C}{a\, p} = \frac{k\, S \sec^2 \alpha}{a\, p\, F_0} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 27).$$

Der Horizontalschub ergibt sich also durch zeichnerische Abänderung der Polentfernung p_q nach dem Verhältnis

$$\frac{(w_m \pm t)}{(w_y + c)}.$$

Die Strecken t und c sind verhältnismäßig klein und können angenähert (etwa mit dem Rechenschieber) berechnet werden.

Der Ausdruck für das Biegungsmoment M läßt sich nunmehr schreiben:

$$M = p_q\, m - \frac{p_q\,(w_m \pm t)}{(w_y + c)}\, y$$

oder

$$M = p_q \mu \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 28)$$

wobei

$$\mu = m - \frac{(w_m \pm t)}{(w_y + c)} y \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 29).$$

Die Größen μ sind die Ordinaten der Biegungsmomentenlinie und lassen sich zeichnerisch sofort bestimmen, indem man die zeichnerisch nach dem Verhältnis $\frac{(w_m \pm t)}{(w_y + c)}$ abgeänderten y von den m abträgt. Die Normalkräfte können ebenfalls zeichnerisch in einfacher Weise zufolge der in der Gleichung 20 ausgedrückten Beziehung ermittelt werden. Auf Grund der nunmehr ermittelten Kurven der Biegungsmomente M und der Normalkräfte N kann für jeden Querschnitt des Bogens nach dem bekannten zeichnerischen Verfahren die Bestimmung der Größtspannungen erfolgen.

Zu diesem Ziele führt auch noch ein zweiter Weg, nämlich die Ermittlung der Stützlinie des Bogens. Diese geht durch die Mittelpunkte der Kämpfergelenke und ergibt sich in bekannter Weise als Seileck zu dem Kräfteplan der Lasten Q mit der Polentfernung H. Auf Grund der durch die Lage der Stützlinie gegebenen Angriffspunkte der Normalkräfte und deren aus dem Kräfteplan bestimmbaren Größe lassen sich wiederum die Größtspannungen zeichnerisch ermitteln.

5. Statische Berechnung des Zweigelenkbogens für veränderliche Belastung.

In diesem Falle wird die Berechnung unter Zuhilfenahme von Einflußlinien am raschesten zum Ziele führen. Zu diesem Ende ist es jedoch nötig, die Bestimmung des Einflusses von Wärmeschwankungen getrennt zu behandeln.

Setzen wir wiederum den allgemeinen Fall eines Bogens mit ungleich hohen Kämpfern voraus, so ist der Ausdruck für den Horizontalschub nach Gleichung 8 gegeben durch:

$$H = \frac{\sum_1^n \mathfrak{M}\, y}{\sum_1^n y^2 + \frac{k\, S \sec^2 \alpha}{F_0}} .^{*)}$$

Denken wir uns in irgend einem Punkte des freiaufliegenden Trägers von der Länge l eine Kraft Q wirken (siehe Abb. 3), so stellt

*) Der Einfachheit halber sei hier H an Stelle von H_q gesetzt.

sich das Biegungsmoment dieser Last in bezug auf den Punkt P dar durch:

$$\mathfrak{M} = Q \frac{(l-\lambda)}{l} x,$$

beziehungsweise

$$\mathfrak{M} = Q \frac{\lambda}{l} (l-x).$$

Wenn wir diese Ausdrücke für $\mathfrak{M}$ in $\sum_1^n \mathfrak{M} y$ einsetzen, so können wir Q vor das Summenzeichen stellen. Geben wir den Ordinaten y die Bedeutung von Kräften, so stellt der Summenausdruck das Moment der y für den Punkt P dar, und wir können schreiben:

$$\sum_1^n \mathfrak{M} y = Q \mathfrak{M}_y.$$

Denken wir uns dies in den Ausdruck für H eingesetzt, so besagt die so erhaltene Gleichung im Hinblick auf den Umstand, daß der Nenner konstant ist, daß für jeden Punkt P das H dem $\mathfrak{M}_y$ proportional ist. Es erscheint also die Einflußlinie für H durch die Kurve der $\mathfrak{M}_y$ dargestellt. Die Ordinaten dieser Einflußlinie rechnerisch zu bestimmen, wird keinen Schwierigkeiten unterliegen. In der Regel wird man jedoch zu dem einfacheren zeichnerischen Verfahren greifen. Zu diesem Zwecke zeichnen wir zu einem Krafteck der lotrecht wirkenden Kräfte y das zugehörige Seileck (sieh Abb. 5).

Bezeichnen wir den Polabstand des Kraftecks mit p und die Ordinaten des Seileckes mit h, so ist:

$$\mathfrak{M}_y = aph.$$

Nun lassen wir die y parallel zu $K_1 K_2$ wirken und zeichnen zu dem entsprechenden Krafteck mit dem lotrecht gemessenen Polabstande p das Seileck, so schneidet die erste und letzte Seite desselben auf der Achse $K_1 K_2$ die Strecke w ab.

Es ist wie bereits bekannt:

$$\sum_1^n y^2 = apw.$$

Der Ausdruck für H läßt sich nunmehr schreiben:

$$H = \frac{Qaph}{apw + \frac{kS \sec^2 \alpha}{F_0}}$$

Setzen wir

$$c = \frac{kS \sec^2 \alpha}{apF_0} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 30)$$

so ist

$$H = Q \frac{h}{(w+c)} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 31).$$

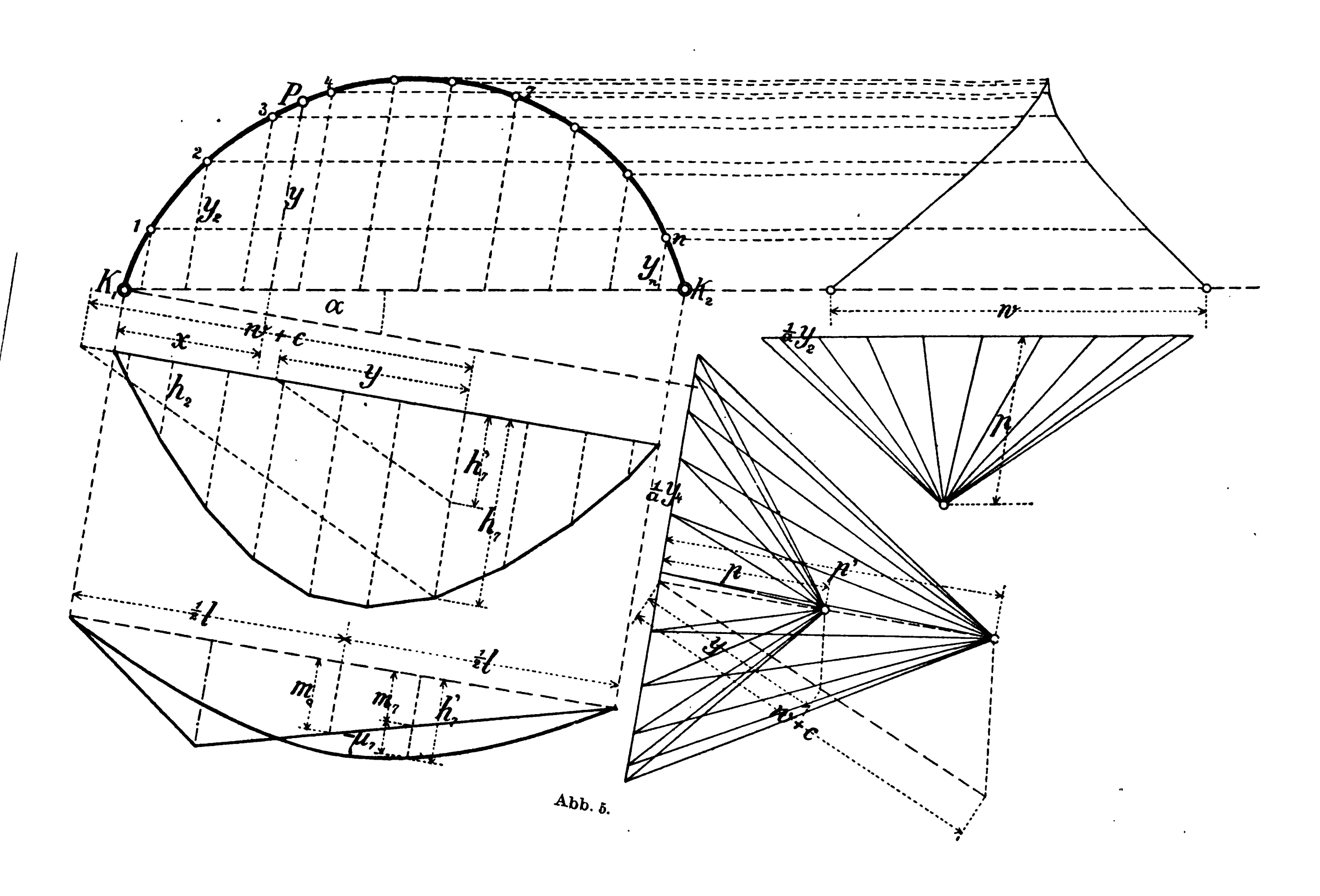

K1
K2
P
1
2
3
4
7
n
y2
y
yn
α
x
w+c
y
h2
h'1
h1
½l
½l
m0
m1
h'1
μ1
w
½y2
p
¼y4
p
p'
y
w+c

Abb. 5.

Diese Gleichung besagt, daß die Ordinaten des Seileckes der Kräfte y, gemessen durch die Strecke $(w + c)$ als Maßstabeinheit, die Einflußwerte des Horizontalschubes darstellen. Die Strecke c ist verhältnismäßig klein und kann nach Gleichung 30 angenähert (mit Hilfe des Rechenschiebers) ermittelt werden. Bei geringer Genauigkeit kann unter Umständen c unberücksichtigt bleiben.

Haben wir die Einflußlinie des Horizontalschubes ermittelt, so können wir zwei Wege einschlagen, um die statische Untersuchung des Bogens zu Ende zu führen. Entweder wir bestimmen für die verschiedenen in Frage kommenden Belastungen den Horizontalschub und zeichnen die Stützlinie des Bogens als Seileck der Lasten, bezogen auf einen Polabstand des zugehörigen Kraftecken von der Größe H, wobei, wie bekannt, die Stützlinie durch die Kämpfergelenkpunkte hindurch zu gehen hat. Oder wir ermitteln für eine Anzahl Punkte des Bogens die Einflußlinien der Biegungsmomente, wodurch wir in die Lage kommen, für die in Frage kommenden Bogenquerschnitte das Biegungsmoment für die jeweilige ungünstigste Laststellung zu bestimmen, was gegenüber dem erstgenannten Verfahren, bei welchem die ungünstigste Lastverteilung von vornherein schätzungsweise angenommen werden mußte, natürlich einen großen Vorteil bedeutet.

Das Biegungsmoment ist für irgend einen Punkt P der Bogenachse nach Gleichung 4 gegeben durch:

$$M = \mathfrak{M} - H y. *)$$

Die Einflußlinie der Biegungsmomente $\mathfrak{M}$ für den Punkt P ist bekanntlich ein Dreieck mit der Spitze in der Lotrechten durch P. Bezeichnen wir die Ordinaten dieser Einflußlinie mit m und legen als Maßstabeinheit die Einheit des Längenmaßstabes zugrunde, so ist für irgend eine Last Q in irgend einem Punkte des Bogens $\mathfrak{M} = Q\, m$.

Für dieselbe Last ist laut Gleichung 31 der Horizontalabschub in irgend einem Punkte gegeben durch:

$$H = \frac{Q\, h}{(w + c)}.$$

Denken wir uns nun für das Produkt $H y$, welches ein Moment darstellt, auch eine Einflußlinie gezeichnet und messen deren Ordinaten h' ebenfalls durch die Längeneinheit, so ist für dieselbe Last Q in irgend einem Punkte

$$H y = Q\, h' \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 32).$$

*) Vergl. Melan: „Die Beton-Eisenbrücke Chauderon-Montbenon in Lausanne". Wilh. Ernst & Sohn. Berlin 1906. S. 18 u. 19.

Auf Grund der so erhaltenen Beziehungen ist das gesuchte Biegungsmoment

$$M = Q\,m - Q\,h' = Q\,\mu \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; 33)$$

wobei μ die Ordinaten der Einflußlinie von M, gemessen durch die Längeneinheit als Maßstabeinheit, bedeuten, und es ergeben sich diese Ordinaten als Differenz der Ordinaten der Einflußlinie der $\mathfrak{M}$ und der Hy:

$$\mu = m - h' \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; 34).$$

Unter der Voraussetzung des obenerwähnten Einflußlinien-Maßstabes kann nun die Linie der m sofort gezeichnet werden, da, wie sich leicht nachweisen läßt, deren Ordinate für die Mitte von l gegeben ist durch:

$$m_0 = \frac{x}{2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; 35).$$

Die zugehörige Linie der h' ist ebenfalls unschwer zu ermitteln und zwar können hierbei zwei Wege eingeschlagen werden. Auf Grund der Gleichungen 31 und 32 ergibt sich folgende Beziehung:

$$\frac{h'}{h} = \frac{y}{(w+c)} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; 36).$$

Die Linien der h und h' können aber auch als Seilecke zu den Kräften y gezeichnet werden. Für diesen Fall stehen die Ordinaten h und h' im umgekehrten Verhältnis zu den Polentfernungen p und p', und wir erhalten die weitere Beziehung:

$$\frac{p}{p'} = \frac{y}{(w+c)} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; 37).$$

Das in Gleichung 36 ausgedrückte Verhältnis ergibt die zeichnerische Bestimmung der Ordinaten h' durch Abänderung der gegebenen Ordinaten h nach dem Verhältnis $\frac{y}{(w+c)}$.

Die in Gleichung 37 ausgedrückte Beziehung besagt, daß die Polentfernung p' für das Seileck der Linie h' durch (zeichnerische) Abänderung der gegebenen Polentfernung p nach dem Verhältnis $\frac{(w+c)}{y}$ bestimmt werden kann. In Abb. 5 sind beide Verfahren ersichtlich gemacht.

Neben den Einflußlinien der M für die einzelnen Punkte des Bogens müssen wir noch die Einflußlinie der $\mathfrak{V}$ bestimmen, um auf Grund der Gleichung 10 die Normalkräfte und sodann die Größtspannungen ermitteln zu können. Diese Einflußlinie der $\mathfrak{V}$ ist wie bekannt eine gerade Linie mit den Endordinaten O und Einflußlinienmaßstabeinheit (in Abb. 5 nicht ersichtlich gemacht).

Wie eingangs der Erläuterung des Einflußlinienverfahrens erwähnt wurde, hat hierbei die Bestimmung des Einflusses von Wärmeschwankungen getrennt zu erfolgen. Die Ermittlung derselben auf rechnerischem Wege geschieht auf Grund der Gleichungen 11, 15 und 16 und bedarf keiner weiteren Bemerkungen. Hinsichtlich der zeichnerischen Bestimmung ist zu erwähnen, daß die Linie der Biegungsmomente auf Grund der Gleichung 11 durch die Bogenachse selbst dargestellt ist, wenn diese als Seillinie mit einer zugehörigen Polentfernung H_t aufgefaßt wird. Die Normalkräfte ergeben sich zufolge Gleichung 16 als Projektionen des Horizontalschubes auf die Normalen der einzelnen Punkte der Bogenachse.

DRITTER TEIL.

Statische Untersuchung von Bogen- und Wölbtragwerken ohne Gelenke.

1. Ableitung der Grundformeln für das belastete Tragwerk ohne Einfluß von Wärmeschwankungen.

Der Ausdruck für die Formänderungsarbeit für den gewichtlos gedachten eingespannten Bogen (sieh Abb. 6) ist wie beim Bogen mit Kämpfergelenken gegeben durch:

$$\mathfrak{A} = \int_0^S \frac{M^2\,ds}{2\,EJ} + \int_0^S \frac{N^2\,ds}{2\,EF}.$$

Unter der Voraussetzung ähnlicher angenäherten Annahmen wie dort (siehe Seite 8) erhalten wir:

$$\mathfrak{A} = \int_0^S \frac{M^2\,ds}{2\,EJ} + \frac{H_q^2\,S \sec^2\alpha}{2\,EF_0}.$$

Wir könnten nun, so wie es beim Zweigelenkbogen geschah, erst die allgemein gültigen Grundformeln ableiten und dann diese im Sinne des Verfahrens mit konstanten Bogengrößen abändern. In vorliegendem Falle empfiehlt es sich jedoch, gleich von vornherein die Vereinfachungen, wie sie sich für einen nach konstanten Bogengrößen geteilten Bogen ergeben, in Anwendung zu bringen.

Der Ausdruck für die Formänderungsarbeit läßt sich dann schreiben:

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{2\,Ek}\sum_1^n M^2 + \frac{H_q^2\,S\sec^2\alpha}{2\,EF_0} \quad \ldots \quad 38).$$

Bezeichnen wir die wagerechten Abstände der Bogenpunkte 1, 2, ... n von der lotrechten Achse AK_1 mit x', die lotrechten Abstände

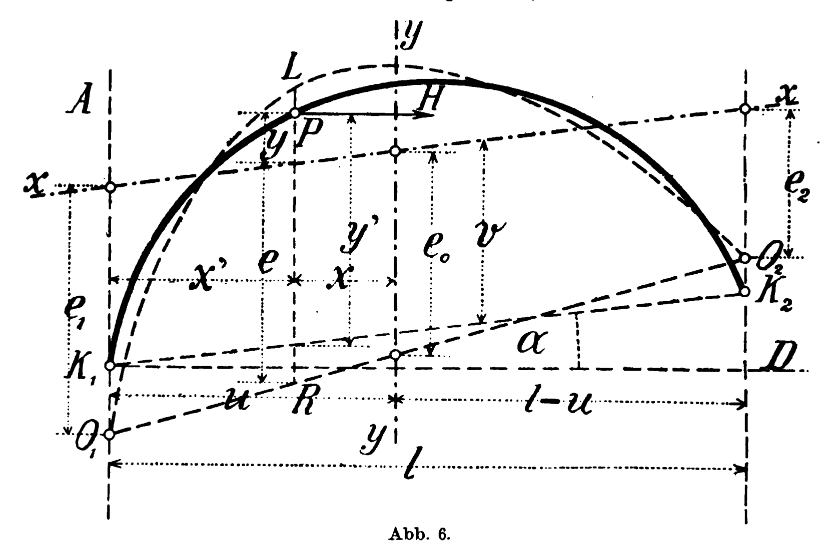


Abb. 6.

von der Achse $K_1\,K_2$ mit y' und führen neue Achsen ein, welche zu den ebengenannten in den Abständen u und v parallel laufen, wobei

$$u = \frac{\sum\limits_1^n x'}{n} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 39)$$

und

$$v = \frac{\sum\limits_1^n y'}{n} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 40),$$

so gelten für die nunmehrigen Abstände $x = (x' - u)$ und $y = (y' - v)$ die folgenden Gleichungen:

$$\sum_1^n x = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \quad 41),$$

$$\sum_1^n y = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \quad 42)$$

und angenähert

$$\sum_1^n xy = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \quad 43).$$

Letztere Annäherung ist bei einem statisch zweckmäßig ausgebildeten Bogen- oder Wölbtragwerk in der Regel berechtigt. Sollte jedoch eine entsprechende Nachrechnung einen nicht zu vernachlässigenden Wert ergeben, so kann durch entsprechende Abänderung der Bogenform (die meist ganz geringfügiger Natur ist) der Wert $\sum_1^n x\,y$ verschwindend klein gemacht werden. Übrigens läßt sich das Bogentragwerk von vornherein so annehmen, daß $\sum_1^n x\,y = 0$ werden muß. Zu diesem Zwecke errichten wir im Mittelpunkte von $K_1\,K_2$ eine Senkrechte und zeichnen zu dieser Senkrechten eine vollständig symmetrische Bogenachse mit den Kämpferpunkten in K_1 und K_2. Nun zeichnen wir durch den Mittelpunkt von $K_1\,K_2$ eine Lotrechte und projizieren die Bogenachse derart, daß deren Pfeil in diese Lotrechte zu fallen kommt. Nun bestimmen wir für den links von dieser Lotrechten gelegenen Teil der Bogenachse die Bogenquerschnitte und teilen diesen Teil des Bogens nach konstanten Bogengrößen ein. Zu den so erhaltenen Bogenpunkten des linken Teiles der Bogenachse suchen wir jene des rechten Teiles, welche dieselben Abstände von der Achse $K_1\,K_2$ haben, und wählen die Bogenquerschnitte derart, daß $\frac{s}{J}$ $\left(\text{bezw.} \frac{s}{EJ}\right)$ dieselbe konstante Größe gibt wie beim linken Teil des Bogens. Für diesen so erhaltenen Bogen ist $u = \frac{1}{2}\,l$ und, wie leicht einzusehen, $\sum_1^n x\,y = 0$.*)

*) Für den Fall eines ganz unregelmäßig geformten Tragwerkes muß das Achsensystem zur Erzielung von $\sum_1^n xy = 0$ folgendermaßen bestimmt werden. (Vergl. Müller-Breslau: „Vereinfachung der Theorie der statisch unbestimmten Bogenträger" Zeitschr. d. Arch.- u. Ing.-Ver. zu Hannover, 1884, H. 8, S. 635). Wir beziehen zuerst die Koordinaten der Bogenpunkte auf das rechtwinklige Achsenkreuz $A K_1 D$. Bezeichnen wir diese Ordinaten mit x' und y', so ergeben sich die Koordinaten des neuen Ursprungs mit

$$u = \frac{\sum_1^n x'}{n} \quad \text{und} \quad v = \frac{\sum_1^n y'}{n}.$$

Die neue Ordinatenachse ist senkrecht auf $K_1\,D$, während die Abszissenachse zu $K_1\,D$ unter einem Winkel γ geneigt ist:

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{u\sum_1^n y' - \sum_1^n x'y'}{u\sum_1^n x' - \sum_1^n x'^2}.$$

Der weitere Rechnungsvorgang bleibt seinem Wesen nach ungeändert.

Bedeutet die in Abb. 6 gestrichelte Linie $O_1 L O_2$ die Stützlinie des Bogens für irgend eine Belastung, so ist das Biegungsmoment für irgend einen Querschnitt im Punkte P bekannterweise gegeben durch:

$$M = H_q \cdot \overline{PL} = H_q [\overline{RL} - (y + e)].$$

$\overline{RL}$ ist aber die Ordinate des Seileckes zu einem Kräfteplan mit der Polentfernung H, und daher:

$$H_q \cdot \overline{RL} = \mathfrak{M}.$$

Nachdem nun

$$e = e_0 + \frac{(e_1 - e_2)}{l} x,$$

so erhalten wir:

$$M = \mathfrak{M} - H_q y - H_q \frac{(e_1 - e_2)}{l} x - H_q e_0$$

oder

$$M = \mathfrak{M} - H_q y - Xx - Z \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 44)$$

wobei

$$X = H_q \frac{(e_1 - e_2)}{l} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 45)$$

und

$$Z = H_q e_0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 46).$$

X bedeutet eine Kraft, und zwar den Unterschied der lotrechten Seitenkraft des Kämpferdruckes des eingespannten Bogens und des Auflagerdruckes des freiaufliegenden Balkenträgers von der Länge l. Z bedeutet ein Moment.

Auf Grund des Satzes vom Kleinstwert der Formänderungsarbeit und unter Voraussetzung starrer Widerlager muß:

$$\frac{d\mathfrak{A}}{dH_q} = 0, \quad \frac{d\mathfrak{A}}{dX} = 0, \quad \frac{d\mathfrak{A}}{dZ} = 0.$$

Da nun

$$\frac{dM}{dH_q} = -y, \quad \frac{dM}{dX} = -x, \quad \frac{dM}{dZ} = -1,$$

so ergeben sich folgende Gleichungen:

$$-\frac{1}{kE} \sum_1^n My + \frac{H_q S \sec^2 \alpha}{EF_0} = 0, \quad \sum_1^n Mx = 0, \quad \sum_1^n M = 0.$$

Setzen wir für M den Ausdruck aus Gleichung 44 ein und berücksichtigen hierbei das Bestehen der Gleichungen 41, 42 und 43, so erhalten wir schließlich folgende Grundformeln:

$$H_? = \frac{\sum_1^n \mathfrak{M} y}{\sum_1^n y^2 + \frac{k\,S \sec^2\alpha}{F_0}} \quad \ldots \ldots \quad 47),$$

$$X = \frac{\sum_1^n \mathfrak{M} x}{\sum_1^n x^2} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 48),$$

$$Z = \frac{\sum_1^n \mathfrak{M}}{n} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 49).$$

Für den Fall eines Bogens mit gleich hohen Kämpfern und symmetrischer Ausbildung haben wir:

$$u = \frac{\sum_1^n x'}{n} = \frac{l}{2}$$

und es sind die x und y die Koordinaten der Bogenpunkte, bezogen auf ein rechtwinkliges Achsensystem, dessen Abszissenachse eine Parallele zu $K_1 K_2$ im Abstande

$$v = \frac{\sum_1^n y'}{n}$$

und dessen Ordinatenachse die Bogensymmetrale ist. Der Ausdruck für den Horizontalschub ist für diesen Fall gegeben durch:

$$H_q = \frac{\sum_1^n \mathfrak{M} y}{\sum_1^n y^2 + \frac{kS}{F_0}} \quad \ldots \ldots \quad 50).$$

Die Ausdrücke für X und Z lauten gleich jenen in Gleichung 48 und 49.

Die Formel für die Normalkräfte ist dieselbe wie beim Zweigelenkbogen:

$$N = H_q \cos\psi + V \sin\psi \quad \ldots \ldots \quad 51).$$

Die lotrechte Seitenkraft V der im Querschnitt wirkenden Mittelkraft setzt sich zusammen aus der Auflagerkraft $\mathfrak{V}$, wie sie dem freiaufliegenden Balken von der Länge l entspricht, und aus der Kraft X.

Es ist

$$V = \mathfrak{V} + X \quad \ldots \ldots \quad 52).$$

2. Ableitung der Grundformeln für das unbelastete Tragwerk unter dem Einfluß von Wärmeschwankungen.

Diese Untersuchung gestaltet sich ähnlich wie beim Zweigelenkbogen. Der Ausdruck für die Formänderungsarbeit hat unter Berücksichtigung der Teilung nach konstanten Bogengrößen folgende Form:

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{2\,Ek} \sum_1^n M^2 + \frac{H_t^2\, S \sec^2 \alpha}{2\,EF_0} - \varepsilon \tau l H_t \sec^2 \alpha \quad . \quad . \quad 53).$$

Das Biegungungsmoment für einen Punkt der Bogenachse lautet allgemein:

$$M = -H_t y - Xx - Z.$$

Zufolge des Gesetzes vom Kleinstwert der Formänderungsarbeit muß wiederum:

$$\frac{d\mathfrak{A}}{dH_t} = 0, \quad \frac{d\mathfrak{A}}{dX} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{d\mathfrak{A}}{dZ} = 0.$$

Nach durchgeführter partieller Differentiation ergeben sich folgende Grundgleichungen:

$$X = 0, \quad Z = 0^{*)}$$

und somit

$$M = -H_t y \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 54).$$

Der Ausdruck für den Horizontalschub lautet daher:

$$H_t = \pm \frac{kE\varepsilon\tau l \sec^2 \alpha}{\sum_1^n y^2 + \frac{kS \sec^2 \alpha}{F_0}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 55).$$

Ein Vergleich dieser Grundformeln mit den Gleichungen 11 und 14 ergibt ein vollständiges Übereinstimmen derselben, nur ist hier die Bedeutung der Abstände y eine andere. Es kann daher in bezug auf alles Übrige auf Punkt 2 des zweiten Teiles (Seite 10 und 11) verwiesen werden.

3. Die Grundformeln für das belastete Tragwerk unter gleichzeitigem Einfluß von Wärmeschwankungen.

Die Grundformeln für den Gesamthorizontalschub entsprechen, unter Berücksichtigung der geänderten Bedeutung von y, den Gleichungen 17 und 18 in Punkt 3, zweiter Teil. Die Ausdrücke für X und Z sind unverändert den Gleichungen 48 und 49 zu entnehmen. Der Ausdruck für das Biegungsmoment ist gegeben durch:

$$M = \mathfrak{M} - Hy - Xx - Z \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 56).$$

Die Formel für die Normalkraft lautet:

$$N = H \cos \psi + (\mathfrak{V} + X) \sin \psi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 57).$$

---

*) Daß X und Z gleich Null sind, ergibt sich auf Grund einiger Überlegung von vornherein.

4. Statische Berechnung des eingespannten Bogens bei unveränderlicher Belastung.

Hinsichtlich der Voraussetzungen, unter welchen die Berechnung für einen bestimmten Belastungsfall vorgenommen wird, sei auf Punkt 4, zweiter Teil, Seite 12, verwiesen.

Für den allgemeinen Fall eines Bogens mit ungleich hohen Kämpfern unter dem Einfluß von Wärmeschwankungen ergeben sich folgende Grundformeln:

$$H = \frac{\sum_1^n \mathfrak{M} y \pm T}{\sum_1^n y^2 + C} \quad \ldots \ldots \ldots \; 58)$$

wobei

$$T = k E \varepsilon \tau l \sec^2 \alpha \quad \ldots \ldots \ldots \; 59)$$

und

$$C = \frac{k S \sec^2 \alpha}{F_0} \quad \ldots \ldots \ldots \; 60).$$

Weiter

$$X = \frac{\sum_1^n \mathfrak{M} x}{\sum_1^n x^2}, \qquad Z = \frac{\sum_1^n \mathfrak{M}}{n}.$$

Die Berechnung dieser Ausdrücke bietet keine Schwierigkeiten. Vor allem sind auf Grund der gegebenen Abstände x' und y', zufolge der Gleichungen 39 und 40, die Achsenentfernungen u und v und die neuen Abstände x und y zu berechnen. Sodann sind für die Bogenpunkte die statischen Momente $\mathfrak{M}$ zu ermitteln, worauf sämtliche Summenausdrücke gegeben sind. Die zur besseren Übersicht anzulegende Tabelle wird folgendes Aussehen haben:

Punkt	x' in m	x in m	x^2 in m²	y' in m	y in m	y^2 in m²	$\mathfrak{M}$ in tm	$\mathfrak{M}x$ in tm²	$\mathfrak{M}y$ in tm²
1	...	...	...	...	...	...	...	...	...
2	...	...	...	...	...	...	...	...	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
n	...	...	...	...	...	...	...	...	...
	$\sum_1^n x' = \cdots$		$\sum_1^n x^2 = \cdots$	$\sum_1^n y' = \cdots$		$\sum_1^n y^2 = \cdots$	$\sum_1^n \mathfrak{M} = \cdots$	$\sum_1^n \mathfrak{M} x = \cdots$	$\sum_1^n \mathfrak{M} y \; \ldots$

Für die Berechnung der Größen T und C gilt das in Punkt 4, zweiter Teil, Gesagte. Nunmehr lassen sich die Biegungsmomente M zufolge Gleichung 56 und die Normalkräfte N zufolge Gleichung 57 ermitteln, worauf die Berechnung der ungünstigsten Spannungen in jedem Querschnitt erfolgen kann.

Soll die statische Untersuchung auf zeichnerischem Wege erfolgen (siehe Abb. 7), so sind vor allem die Achsentfernungen u und v zu bestimmen. Zu diesem Ende denken wir uns Zähler und Nenner der Gleichungen 39 und 40 mit einer beliebigem Kraft g multipliziert:

$$u = \frac{\sum_1^n x' g}{ng} \quad \text{und} \quad v = \frac{\sum_1^n y' g}{ng}.$$

Lassen wir diese Kräfte g in den Bogenpunkten einmal parallel zur Achse AK_1 und ein zweites mal parallel zur Achse $K_1 K_2$ wirken, so ergeben sich die Achsentfernungen u und v als Abstände der jeweiligen Mittelkraft ng von den Achsen AK_1 und $K_1 K_2$, oder was dasselbe ist, die neuen Achsen sind durch die Richtungen der beiden Mittelkräfte gegeben.*) Nunmehr wird für die Belastung durch die Kräfte Q_1, Q_2 . . . . in der bekannten Weise die Linie der Biegungsmomente für den freiaufliegenden Träger von der Länge l gezeichnet und dann werden die den Bogenpunkten entsprechenden Ordinaten m_1, m_2 . . . m_n jener Linie bestimmt. Der Ausdruck für $\mathfrak{M}$ lautet dann:

$$\mathfrak{M} = p_q m.$$

Was nun die Ermittlung des Horizontalschubes anbelangt, so gestaltet sich diese ähnlich wie beim Zweigelenkbogen, und wir erhalten auch eine ähnliche Formel dafür:

$$H = \frac{p_q a_m p_m w_m \pm T}{p_y a_y w_y + C}.$$

Die vereinfachende Anwendung gleicher Verkleinerungsmaßstäbe ($a_w = a_y$) für die als Kräfte wirkenden Ordinaten ist hier, wie leicht einzusehen, nicht gut durchführbar und unzweckmäßig, wohl aber können die Polentfernungen gleich groß angenommen werden, also $p_m = p_y = p$. Wir erhalten somit für den Horizontalschub den Ausdruck:

$$H = \frac{p_q a_m (w_m \pm t)}{a_y (w_y + c)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 61)$$

wobei

$$t = \frac{T}{a_m p p_q} = \frac{k E \varepsilon \tau l \sec^2 \alpha}{a_m p p_q} \quad \ldots\ldots \quad 62)$$

---

*) Um die Übersichtlichkeit in Abb. 7 nicht zu sehr zu stören, wurde diese Achsenbestimmung nicht zur Darstellung gebracht.

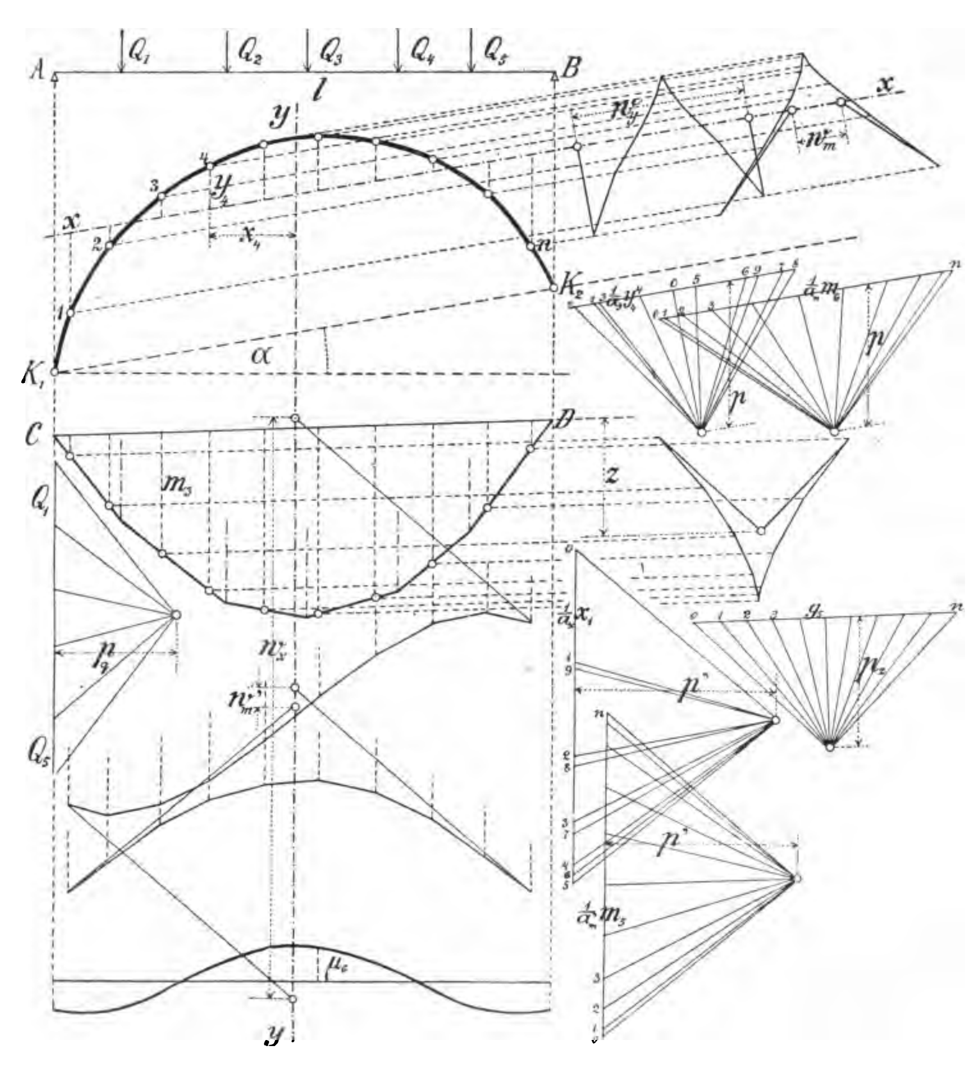


Abb. 7.

und
$$c = \frac{C}{a_y p} = \frac{k S \sec^2 \alpha}{a_y p F_0} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 63).$$

Das Verfahren zur Ermittlung der Größen w_m und w_y ist aus Abb. 7 zu ersehen. Hinsichtlich der Berechnung der kleinen Strecken t und c sei auf Punkt 4, zweiter Teil (Seite 15) verwiesen.

Der Zähler im Ausdruck von X bedeutet das statische Moment der in den Bogenpunkten lotrecht wirkenden idealen Kräfte m, bezogen auf die Achse x - x. Es ist:

$$\sum_1^n \mathfrak{M} x = p_q \sum_1^n m\, x.$$

In ähnlicher Weise ergibt sich der Nenner als statisches Moment der in den Bogenpunkten wirkenden idealen Kräfte x, bezogen auf die Achse x - x. Wir erhalten somit folgende Formel:

$$X = \frac{p_q\, a_m{}'\, p_m{}'\, w_m{}'}{a_x\, p_x\, w_x}.$$

Aus denselben Gründen wie beim Horizontalschub können wir hier nur von der Vereinfachung gleicher Polentfernungen Gebrauch machen:

$$p_m{}' = p_x = p'.$$

Unter dieser Voraussetzung erhalten wir:

$$X = \frac{p_q\, a_m{}'\, w_m{}'}{a_x\, w_x} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 64)$$

Zum Zwecke der zeichnerischen Bestimmung von Z multiplizieren wir Zähler und Nenner mit der beliebigen Größe g. Es ist dann:

$$Z = \frac{\sum_1^n \mathfrak{M} g}{n g} = \frac{p_q \sum_1^n m g}{n g}.$$

Der nunmehr erhaltene Ausdruck

$$\frac{\sum_1^n m g}{n g}$$

bedeutet den Abstand der Mittelkraft $n g$ der in den Endpunkten der Ordinaten m parallel zur Achse CD wirkenden Kräfte g von dieser Achse, und wir können schreiben:

$$Z = p_q z \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 65)$$

Das Biegungsmoment ist nunmehr gegeben durch:

$$M = p_q m - \frac{p_q\, a_m (w_m \pm t)}{a_y (w_y + c)}\, y - \frac{p_q\, a_m{}'\, w_m{}'}{a_x\, w_x}\, x - p_q z$$

oder
$$M = p_q \mu \quad \ldots \ldots \ldots \quad 66)$$
wobei
$$\mu = m - \frac{a_m (w_m \pm t)}{a_y (w_y + c)} y - \frac{a_m' w_m'}{a_x w_x} x - z \quad \ldots \quad 67).$$

Die Ordinaten μ der Biegungsmomentenlinie erhalten wir somit, indem wir von den Ordinaten m die nach obigen Verhältnissen zeichnerisch abgeänderten y und x, sowie die Strecke z zum Abtrag bringen. Die so erhaltenen Punkte verbunden, ergibt die in Abb. 8 ersichtlich gemachte Biegungsmomentenlinie.

Um die Spannungen in den Querschnitten zu bestimmen, brauchen wir noch die Normalkräfte. Diese ermitteln wir auf Grund der Gleichung
$$N = H \cos \psi + (\mathfrak{V} + X) \sin \psi.$$

Geschieht die statische Untersuchung des eingespannten Bogens auf Grund des Stützlinienverfahrens, so sind zunächst die Größen H, X und Z auf Grund der Gleichungen 61, 64 und 65 zu ermitteln, was auf zeichnerischem Wege keine Schwierigkeiten bereitet. Nunmehr können die Bestimmungsstücke, welche die Lage der Schlußlinie $O_1 O_2$ der Stützlinie festlegen, berechnet werden.

Zufolge Abb. 6 ist
$$e_1 = e_0 + \frac{(e_1 - e_2)}{l} u$$
und
$$e_2 = e_0 - \frac{(e_1 - e_2)}{l} (l - u).$$

Unter Berücksichtigung der Gleichungen 45 und 46 erhalten wir:
$$e_1 = \frac{(Z + X)}{H} u \quad \ldots \ldots \ldots \quad 68)$$
und
$$e_2 = \frac{(Z - X)}{H} (l - u) \quad \ldots \ldots \ldots \quad 69).$$

Die Stützlinie selbst ergibt sich in der bekannten Weise als Seileck zu einem Kräfteplan der Lasten Q mit der Polentfernung H. Die Bestimmung der ungünstigsten Spannungen in den einzelnen Querschnitten kann nun ähnlich wie beim Zweigelenkbogen erfolgen (vergl. Seite 16).

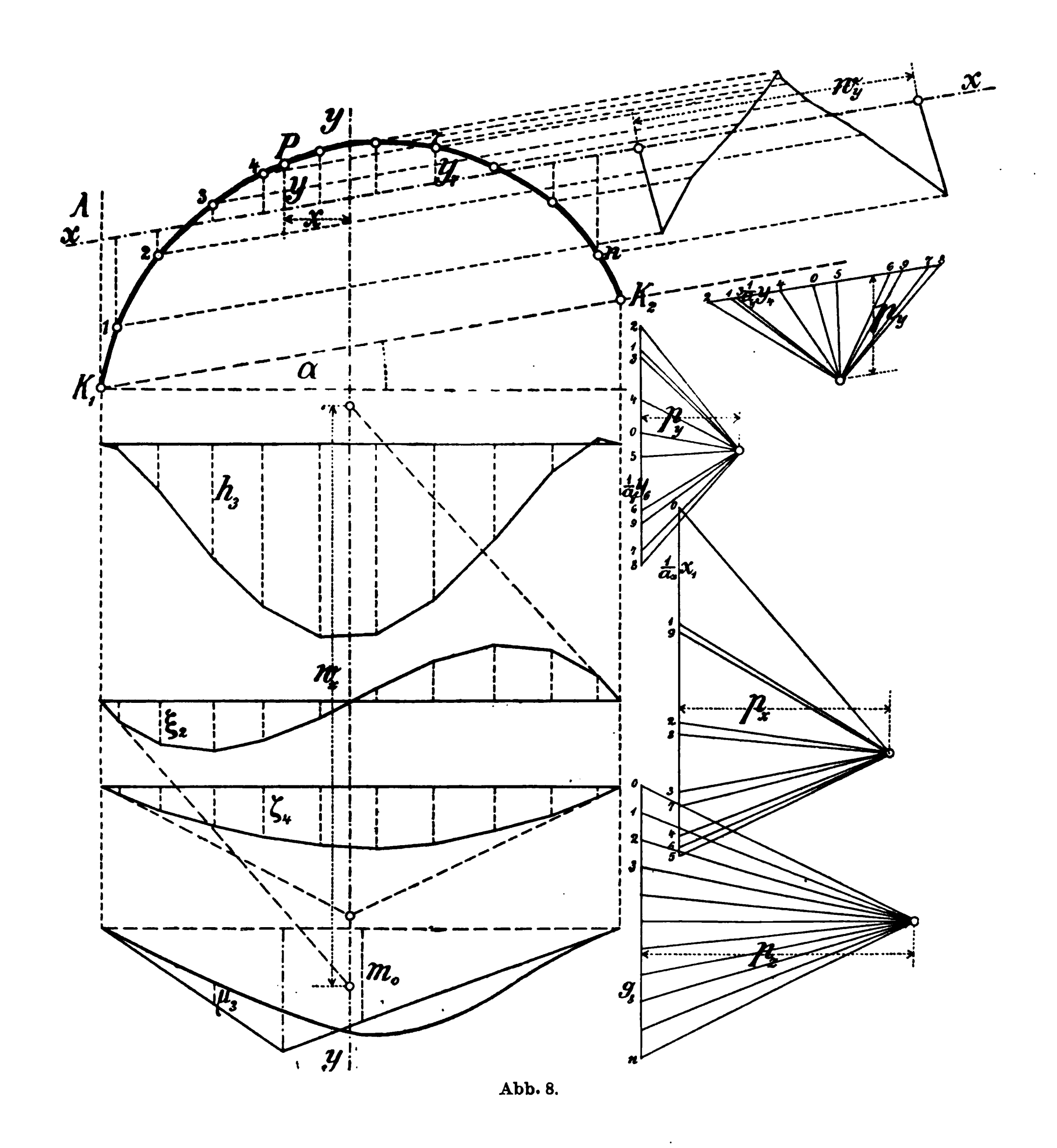


Abb. 8.

5. Statische Berechnung des eingespannten Bogens für veränderliche Belastung.

Wie beim Bogen mit Kämpfergelenken, so wird auch hier das Verfahren mittels Einflußlinien am raschesten zum Ziele führen. Es wird zu diesem Ende auch hier notwendig sein, die Bestimmung des Einflusses von Wärmeschwankungen getrennt zu behandeln.

Es sind zunächst die Einflußlinien des Horizontalschubes H_q,*) der Kraft X und des Momentes Z zu ermitteln. Wie beim Zweigelenkbogen erscheint auch hier, im Hinblick auf die Übereinstimmung der Formeln (sieh Seite 17), die Einflußlinie des Horizontalschubes dargestellt durch das Seileck der lotrecht in den Bogenpunkten wirkenden idealen Kräfte y (sieh Abb. 8) und es ist:

$$H = Q \frac{h}{(w_y + c)} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 70)$$

wobei

$$c = \frac{k S \sec^2 \alpha}{a p_y F_0} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 71).$$

Die Strecke w_y erhalten wir in derselben Weise wie beim Zweigelenkbogen, indem wir zu den in den Bogenpunkten parallel zur Achse y-y wirkenden idealen Kräften y das Seileck zeichnen, dessen letzte Seiten das Stück w_y auf dieser Achse herausschneiden.**)

Ähnlich gestaltet sich der Vorgang zur Bestimmung der Einflußlinie der Kraft X. Da

$$\sum_1^n \mathfrak{M} x = Q\, \mathfrak{M}_x \text{ ***)},$$

so erhalten wir

$$X = \frac{Q\, \mathfrak{M}_x}{\sum_1^n x^2}.$$

Weil der Ausdruck im Nenner konstant ist, so erscheint die Einflußlinie der Kraft X dargestellt durch das Seileck der lotrecht in den Bogenpunkten wirkenden idealen Kräfte x. $\sum_1^n x^2$ ist das Moment der idealen Kräfte x, bezogen auf die Achse x-x. Bezeichnen wir die Ordinaten dieser Einflußlinie mit ξ und den Abschnitt der ersten

*) Der Einfachheit halber sei hier H an Stelle von H_q gesetzt.

**) Vorausgesetzt ist natürlich, daß die beiden Kraftecke der lotrecht und schräg wirkenden idealen Kräfte y gleiche Maßstäbe und Polentfernungen aufweisen.

***) Vergl. Seite 17.

und letzten Seite des Seileckes auf der Achse $x \cdot x$ mit w_x, so ergibt sich das X für eine Last Q mit:

$$X = \frac{Q\, a_x\, p_x\, \xi}{a_x\, p_x\, w_x} = \frac{Q\, \xi}{w_x} \quad \ldots\ldots\ 72).$$

Die Einflußlinie für das Moment Z bestimmt sich folgendermaßen. Wir multiplizieren Zähler und Nenner im Ausdruck von Z mit der beliebigen Größe g

$$Z = \frac{\sum\limits_1^n \mathfrak{M}}{n} = \frac{\sum\limits_1^n \mathfrak{M}\, g}{n g}.$$

Nun ist aber wiederum

$$\sum_1^n \mathfrak{M}\, g = Q\, \mathfrak{M}_g, \quad \text{also} \quad Z = \frac{Q\, \mathfrak{M}_g}{n g}.$$

Zeichnen wir somit zu den lotrecht in den Bogenpunkten wirkenden Kräften g ein Seileck, so stellt dieses die Einflußlinie der Z dar. Bezeichnen wir die Ordinaten derselben mit ζ und die Polentfernung des zugehörigen Krafteckes mit p_z, so ist

$$Z = \frac{Q\, p_z\, \zeta}{n g}.$$

Machen wir nun $p_z = n g$, so ist

$$Z = Q\, \zeta \quad \ldots\ldots\ldots\ 73)$$

d. h. die Einflußlinienmaßstabeinheit ist die Längeneinheit selbst.

Auf Grund der Einflußlinien der H, X und Z sind wir nunmehr in der Lage, für irgend einen Belastungsfall diese Größen zu ermitteln und die Stützlinie zu zeichnen. Die hierzu nötigen Bestimmungsstücke sind bereits in den Gleichungen 68 und 69 angegeben worden, und im übrigen wird auf diesen Teil hingewiesen.

Haben wir es jedoch mit einer größeren Anzahl von Belastungsfällen zu tun, oder handelt es sich darum, für ein Lastensystem die ungünstigsten Laststellungen zu bestimmen, so wird es vorteilhafter sein, für eine Anzahl von Querschnitten die Einflußlinien der Biegungsmomente M zu ermitteln. Der Vorgang hierbei ist ähnlich wie beim Zweigelenkbogen. Doch soll diesmal ein etwas anderer Gesichtspunkt ins Auge gefaßt werden. Der Ausdruck für M ist laut Gleichung 44 gegeben durch:

$$M = \mathfrak{M} - H y - X x - Z.$$

Führen wir in diesen Ausdruck die in den Gleichungen 70, 72 und 73 ausgesprochenen Beziehungen ein und berücksichtigen, daß $\mathfrak{M} = Qm$, so erhalten wir:

$$M = Qm - \frac{Qh}{(w_y + c)} y - \frac{Q\xi}{w_x} x - Q\zeta.$$

Verstehen wir unter x und y die Ordinaten des Punktes P (sieh Abb. 8), für welchen die Einflußlinie der Biegungsmomente zu bestimmen ist, und bedeutet Q die über das Tragwerk wandernde Last, so können wir schreiben:

$$M = Q\left[m - \frac{y}{(w_y + c)} h - \frac{x}{w_x} \xi - \zeta\right] = Q\mu \quad . \quad . \quad 74)$$

wobei

$$\mu = m - h' - \xi' - \zeta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 75),$$

$$h' = \frac{y}{(w_y + c)} h \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 76)$$

und

$$\xi' = \frac{x}{w_x} \xi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 77).$$

Die Ordinaten μ der gesuchten Einflußlinie der Biegungsmomente ergeben sich also durch Abtrag der nach obigen Verhältnissen abgeänderten Ordinaten h und ξ und der Ordinaten ζ von den Ordinaten m. Die Einflußlinienmaßstabeinheit ist die Längeneinheit selbst. Die Linie der m ist, wie bereits bekannt, ein Dreieck mit der Spitze in der Lotrechten durch P mit der Ordinate in der Mitte von l, gegeben durch:

$$m_0 = \frac{x'}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 78).$$

Die Abänderung der Ordinaten h und ξ nach den in den Gleichungen 76 und 77 angegebenen Verhältnissen kann auf zeichnerischem Wege, ähnlich wie beim Zweigelenkbogen (sieh dort), erfolgen. Auch hier gibt es außerdem noch einen zweiten Weg, der zu demselben Ziel führt, indem wir die Linien der h' und ξ' ermitteln. Da h' und ξ' proportional h und ξ sind, so lassen sich die Linien h' und ξ' ebenfalls als Seilecke zeichnen. Es brauchen nur die Polentfernungen entsprechend abgeändert zu werden. Es gelten die Verhältnisse:

$$\frac{p_y'}{p_y} = \frac{h}{h'} \quad \text{und} \quad \frac{p_x'}{p_x} = \frac{\xi}{\xi'}.$$

Unter Berücksichtigung der Gleichungen 76 und 77 erhalten wir für die abgeänderten Polentfernungen folgende Ausdrücke:

$$p_y' = \frac{(w_y + c)}{y} p_y \quad \ldots \ldots \ldots \quad 79),$$

$$p_x' = \frac{w_x}{x} p_x \quad \ldots \ldots \ldots \quad 80).$$

In Abb. 8 ist das Verfahren zur Bestimmung der Biegungsmomentenlinie nicht ersichtlich gemacht, und es wird in dieser Hinsicht auf das im Punkt 5, zweiter Teil, Gesagte (Seite 20) und auf Abb. 5 verwiesen.

Nunmehr erübrigt es noch, die Einflußlinie der V zu bestimmen. Zu diesem Ende addieren wir (unter Berücksichtigung des Vorzeichens) die Ordinaten der Einflußlinie X zu den Ordinaten der geradlinig verlaufenden Einflußlinie $\mathfrak{V}$ (in Abb. 8 nicht ersichtlich gemacht). Die Ermittlung der Normalkräfte und der ungünstigsten Spannungen kann nun in der bekannten Weise erfolgen.

Was nunmehr die gesonderte Bestimmung des Einflusses von Wärmeschwankungen anbelangt, so sei hierzu auf das im Punkt 5, zweiter Teil (Seite 21) Gesagte hingewiesen, das in sinngemäßer Weise auch hier Geltung hat.

Quellenverzeichnis.

Müller-Breslau: *„Vereinfachung der Theorie der statisch unbestimmten Bogenträger“.* Zeitschr. des Arch.- und Ingenieurvereins zu Hannover, 1884, H. 8.

Steiner: *„Berechnung gewölbter Brücken“.* Technische Blätter, 1900, H. II u. III.

Melan: *„Theorie der eisernen Bogenbrücken und der Hängebrücken“.* Handbuch der Ingenieurwissenschaften. Zweiter Band: Der Brückenbau, 5. Abt. Leipzig 1905. Wilhelm Engelmann.

Melan: *„Die Beton-Eisen-Brücke Chauderon-Montbenon in Lausanne“.* Berlin 1906. Wilhelm Ernst & Sohn.

Buchdruckerei Gebrüder Ernst, Berlin SW. 68.